

# Momentos de Bessel-Fourier de orden fraccional para el análisis de imágenes a color

Horlando Vargas-Vargas, César Camacho-Bello, José S. Rivera-López,  
Alicia Noriega-Escamilla

Universidad Politécnica de Tulancingo,  
México

{horlando.vargas.1631027, cesar.camacho,1915001,  
alicia.noriega.1731021}@upt.edu.mx

**Resumen.** En este trabajo se presenta un nuevo conjunto de momentos ortogonales de orden fraccional definidos en coordenadas polares para analizar imágenes en color y en escala de grises. Se propone como kernel una generalización mediante el orden fraccional de las funciones Bessel de primer orden. También, se analiza las propiedades y características de la nueva familia de momentos propuesta. Finalmente, se presentan los resultados experimentales para demostrar el rendimiento de los descriptores propuestos en comparación a los existentes.

**Palabras clave:** Función Bessel, momentos ortogonales, momentos de quaternion.

## Bessel-Fourier Moments of Fractional Order for Color Image Analysis

**Abstract.** This work presents a new set of fractional order orthogonal moments defined in polar coordinates to analyze color and grayscale images. We propose a new kernel through the fractional order of the first-order Bessel functions. Also, the properties and characteristics of the proposed new family of moments are analyzed. Finally, the experimental results are presented to demonstrate the performance of the proposed descriptors compared to the existing ones.

**Keywords:** Bessel function, orthogonal moments, quaternion moments.

### 1. Introducción

Los momentos ortogonales son usados como descriptores en muchas aplicaciones de visión por computadora [4]. Teague en 1980 [20], introdujo los momentos a partir de una función de base ortogonal, los cuales tienen la capacidad de caracterizar información con una mínima redundancia. Los momentos ortogonales se pueden definir en coordenadas cartesianas o polares.

Por otra parte, los momentos en coordenadas polares o momentos ortogonales circulares tienen la característica de ser invariantes a la rotación, escalado y traslación; propiedades esenciales en aplicaciones de reconocimiento de patrones. Además, de su capacidad de reconstrucción de una imagen con un mínimo orden. Dentro de los momentos ortogonales circulares se encuentran: los momentos de Zernike [18], momentos pseudo-Zernike [3], los momentos ortogonales de Mellin-Fourier [16], momentos de Chebychev-Fourier [12], momentos de Jacobi-Fourier [11], momentos desplazados de Legendre-Fourier [23], los momentos exponenciales de Fourier [7], momentos armónicos de Fourier armónico [13] entre otros.

En años recientes, Bin Xiao et al. en el 2010 [22] propone un nuevo conjunto de momentos basados en la función Bessel de primer tipo, llamados momentos ortogonales de Bessel-Fourier (MOBF), los cuales, tienen la capacidad de reconstruir imágenes en condiciones de distorsión ruidosas, libres de ruido en comparación con los momentos de Mellin-Fourier y los momentos de Zernike. Años más tarde, Z Shao et al [15]. introducen los momentos de Quaternion Bessel-Fourier para el análisis de imágenes a color y para el reconocimiento de patrones mediante el manejo simultáneo de los tres canales de color. De igual forma, estos descriptores tienen la capacidad de estimar el ángulo de rotación de una imagen digital y son más robustos contra las transformaciones geométricas y fotométricas [15].

Los polinomios ortogonales de orden fraccional han sido utilizados como kernels de los momentos ortogonales de orden fraccional para el análisis de imágenes. Bin Xiao [21] propone los momentos desplazados de Legendre de orden fraccional para la extracción de características de una región de interés, por otra, J. Yang et al. [24] proponen los momentos de Zernike de orden fraccional invariantes a la rotación y robustos al ruido, al mismo tiempo H, Zhang et al. [25] definen a los momentos Mellin-Fourier de orden fraccional para el reconocimiento de patrones.

En el 2020, R Benouini et al. [1] presenta los momentos ortogonales de Chebychev de orden fraccional para el análisis de imágenes en escala de grises. Recientemente, B Chen et al. [2] introdujeron los momentos ortogonales de Zernike de orden fraccional para el procesamiento de imágenes a color para la detección de falsificación de copia-movimiento de imagen de color robusta. Finalmente, KM Hosny et al. [6] propone un nuevo conjunto de transformaciones armónicas polares fraccionales para el análisis de imágenes en color y escala de grises invariantes a la rotación, a la escala, a la traslación y robustos al ruido.

En este trabajo se propone la generalización de los momentos ortogonales de Bessel-Fourier para el análisis de imágenes en escala de grises y color. Esta nueva definición implica la introducción de un parámetro fraccional, con el fin de generalizar la noción de orden entero  $n$ . Se realizan experimentos tales como; reconstrucción de imágenes a color y la clasificación de la base datos de COIL-100 utilizando el clasificador kNN ensamble, con la finalidad de analizar la capacidad descriptiva de los MOBFOF. Finalmente se compara el rendimiento de MOBFOF con los momentos que utilizan como kernel las funciones Bessel.

## 2. Momentos de Bessel-Fourier

Bin Xiao [22] propone los momentos de Bessel-Fourier, los cuales utilizan como kernel radial la función de Bessel de primera clase definida de la siguiente manera:

$$J_v(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{v+2k}}{k!(v+k)!}. \tag{1}$$

Se puede representar en términos de funciones hipergeométricas como:

$$J_v(x) = \frac{(x/2)^v}{\Gamma(v+1)} {}_0F_1(v+1, -(x/2)^2), \tag{2}$$

donde  $v$  es una constante real,  $\Gamma(a)$  es la función gamma,  ${}_0F_1$  es la función hipergeométrica generalizada.

Los momentos de Bessel-Fourier de orden  $n$  con repetición  $m$  para una imagen en coordenadas polares  $f(r, \theta)$ , se definen como:

$$B_{n,m} = \frac{1}{2\pi a_n} \int_0^{2\pi} \int_0^1 f(r, \theta) J_v(\lambda_n, r) \exp(-jm\theta) r dr d\theta, \tag{3}$$

donde  $n = 0, 1, 2, \dots, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  es el orden del momento,  $a_n = [J_{v+1}(\lambda_n)]^2/2$  es la constante de normalización,  $J_v(\lambda_n, r)$  es el polinomio de Bessel en  $r$  de grado  $n$ , y  $\lambda_n$  es el  $n$ -ésimo cero de la función de Bessel  $J_v(r)$ . La Fig. 1 muestra la gráfica de los 5 primeros ordenes de los polinomios de Bessel  $J_1(\lambda_n, r)$ . La función  $J_v(\lambda_n, r)$  es ortogonal dentro de un círculo unitario y cumplen la siguiente condición de ortogonalidad:

$$\int_0^1 J_v(\lambda_n, r) J_v(\lambda_k, r) r dr = a_n \delta_{nk}, \tag{4}$$

aquí  $\delta_{nk}$  es el símbolo de Kronecker definido de la siguiente forma:

$$\delta_{n,k} = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ 1, & k = n. \end{cases} \tag{5}$$

## 3. Momentos Bessel-Fourier de orden fraccional

En este trabajo realizamos la generalización de los momentos de Bessel-Fourier mediante la modificación del kernel. La función base propuesta está dada de la siguiente manera:

$$\tilde{J}_{n,m}(\alpha, r, \theta) = \sqrt{\alpha} r^{\alpha-1} J_{n,m}(r^\alpha, \theta), \tag{6}$$

donde  $\alpha$  es el parámetro de generalización. La Fig. 2. muestra los polinomios generalizado con distintos valores de  $\alpha$ . El nuevo kernel cumple con la condición de ortogonalidad. La demostración está dado por el Teorema 1.

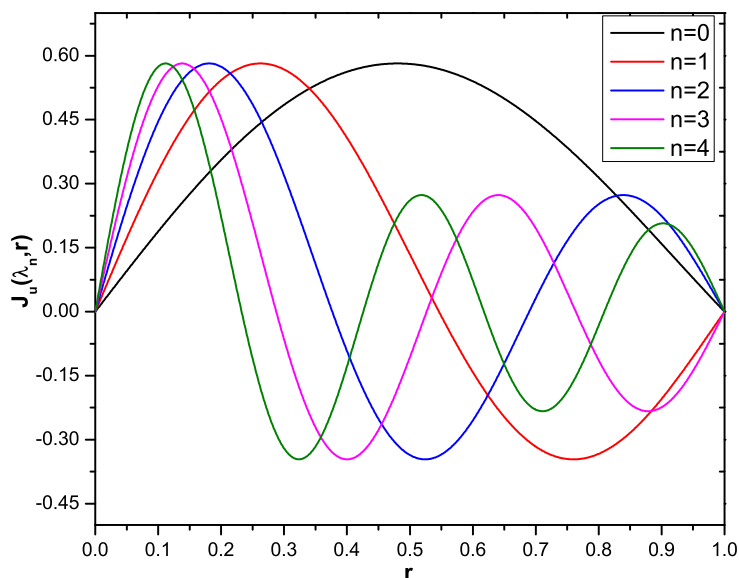


Fig. 1. Polinomio radial de Bessel  $J_1(\lambda_n, r)$  de  $n = 0, 1, 2, 3, 4$ .

**Teorema 1** *El kernel de la generalización de los momentos Bessel-Fourier es ortogonal en el intervalo  $[0, 1]$ :*

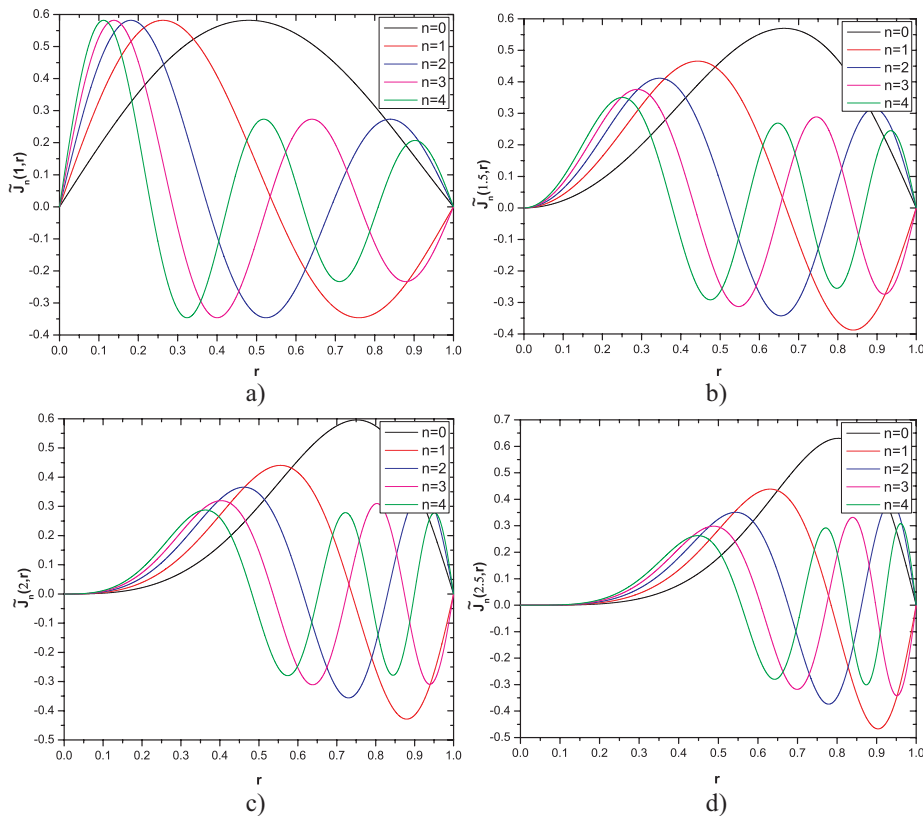
$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \tilde{J}_{n,m}(\alpha, r, \theta) \tilde{J}_{k,l}(\alpha, r, \theta) r dr d\theta = \delta_{nk} \delta_{ml}. \tag{7}$$

*Demostración.* Sustituyendo la Ec. 6 a la Ec. 7, tenemos:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \tilde{J}_{n,m}(\alpha, r, \theta) \tilde{J}_{k,l}(\alpha, r, \theta) r dr d\theta &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{\alpha} r^{\alpha-1} J_{n,m}(r^\alpha, \theta) \sqrt{\alpha} r^{\alpha-1} J_{k,l}(r^\alpha, \theta) r dr d\theta, \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \alpha r^{2\alpha-1} J_{n,m}(r^\alpha, \theta) J_{k,l}(r^\alpha, \theta) dr d\theta, \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \alpha r^{\alpha-1} J_{n,m}(r^\alpha, \theta) J_{k,l}(r^\alpha, \theta) r^\alpha dr d\theta, \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 J_{n,m}(r^\alpha, \theta) J_{k,l}(r^\alpha, \theta) r^\alpha dr^\alpha d\theta, \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 J_{n,m}(r, \theta) J_{k,l}(r, \theta) r dr d\theta, \\ &= \delta_{nk} \delta_{ml}. \end{aligned} \tag{8}$$

Al igual que el kernel de los momentos de Bessel-Fourier, el kernel de los momentos de Bessel-Fourier de orden fraccional consta de dos funciones: en su parte radial  $\tilde{J}_{n,m}(\alpha, r, \theta)$  y el factor exponencial de Fourier  $\exp(-jm\theta)$ .

La expresión general para los Momentos de Bessel-Fourier de orden fraccional de orden  $n$  y repetición  $m$  para una función imagen  $f(r, \theta)$  en coordenadas



**Fig. 2.** Polinomio radial de Bessel de orden fraccional de  $n = 0, 1, 2, 3, 4$  con diferentes valores de  $\alpha$ : a) 1, b) 1.5, c) 2 y d) 2.5.

polares está dada por:

$$\phi_{n,m} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 f(r, \theta) \tilde{J}_{n,m}(\alpha, r, \theta) \exp(-jm\theta) r dr d\theta. \tag{9}$$

#### 4. Momentos de multicanal de Bessel-Fourier de orden fraccional

Recientemente, Singh y Singh [17] definieron los momentos de Zernike multicanal como un conjunto de momentos para cada canal de una imagen a color. Para una imagen  $f(r, \theta)$  en RGB, se definen tres canales de color primario, rojo (R), verde (G) y azul (B) donde la función de imagen podría representarse como  $f_p(r, \theta) = (f_R(r, \theta), f_G(r, \theta), f_B(r, \theta))$ .

Los momentos multicanal pueden representarse como:

$$M_{n,m}^p = \int_0^{2\pi} \int_0^1 f_p(r, \theta) V_{n,m}(r, \theta) r dr d\theta, \quad p \in R, G, B, \quad (10)$$

donde  $V_{n,m}(r, \theta)$  es la función kernel y  $f_p(r, \theta)$  es la función imagen a color. Los momentos multicanal son por lo tanto un conjunto de momentos de cada canal de una imagen a color. Teniendo en cuenta lo anterior los Momentos de Multicanal de Bessel-Fourier de Orden Fraccional (MMBFOF) están definidos de la siguiente manera:

$$\phi_{n,m}^p = \int_0^{2\pi} \int_0^1 f_p(r, \theta) \tilde{J}_{n,m}(\alpha, r, \theta) \exp(-jm\theta) r dr d\theta, \quad p \in R, G, B, \quad (11)$$

La distribución discreta reconstruida de una imagen RGB está dada por:

$$\tilde{f}_p(r, \theta) = \sum_{n=0}^L \sum_{m=-n}^n \phi_{n,m}^p \tilde{J}_{n,m}(\alpha, r) \exp(-jm\theta), \quad (12)$$

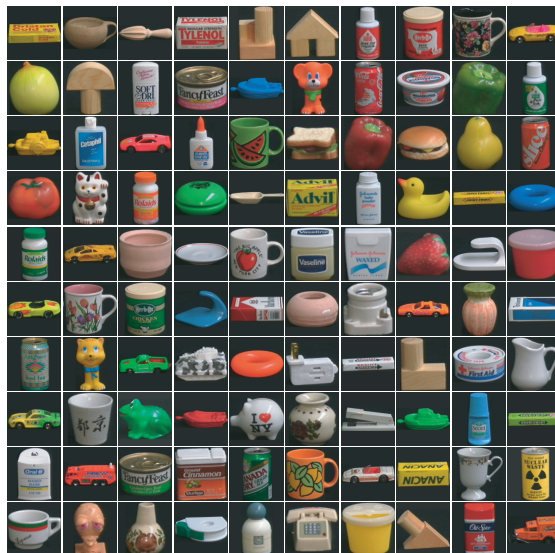
donde  $\tilde{f}_p(r, \theta)$  es la imagen reconstruida de  $f_p(r, \theta)$  y  $L$  es el orden máximo que se utiliza para el cálculo de los momentos ó la reconstrucción de una imagen.

## 5. Experimentos y análisis

En este apartado, se realizan varios experimentos para analizar el comportamiento de alfa en términos del error de reconstrucción y clasificación de imágenes a color. Para evaluar el desempeño los descriptores propuestos se utiliza la base de datos Columbia Object Image Library (COIL-100) [8], la cual es una base de datos pública utilizada por muchos investigadores para evaluar el reconocimiento de objetos en la actualidad. La base de datos COIL-100 contiene 7200 imágenes a color de 100 objetos diferentes. Los objetos fueron colocados en una plataforma giratoria motorizada con fondo negro, esta plataforma se giró a 360 grados con pasos de 5 grados para variar el ángulo de visión del objeto con respecto a una cámara de color fija. Lo que corresponde a 72 orientaciones diferentes de cada objeto. Todas las imágenes tienen un tamaño de 128x128 píxeles con formato PNG. La Fig. 3 muestra las imágenes de los objetos utilizados en la base de datos COIL-100. También, analizamos el comportamiento de la capacidad descriptiva mediante la reconstrucción de imágenes del método propuesto con distintos valores de  $\alpha$  y lo comparamos con la reconstrucción con kernels de la misma familia.

### 5.1. Reconstrucción de imagen en color

La reconstrucción de una imagen puede ayudar a determinar que tan bien una imagen puede ser caracterizada por sus momentos.



**Fig. 3.** Algunas imágenes de la base de datos Columbia Object Library (COIL 100).

De acuerdo con la teoría de momentos ortogonales una imagen digital  $f(x, y)$  puede ser reconstruida por un número infinito de momentos ortogonales. Para medir el desempeño de los MMBFOF se utiliza el error de reconstrucción normalizado conocido como NIRE por sus siglas en inglés, el cual es calculado mediante el error cuadrático medio normalizado de la imagen original  $f_p(r, \theta)$  y la imagen reconstruida  $\tilde{f}_p(r, \theta)$ :

$$NIRE = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} [\tilde{f}_p(r, \theta) - f_p(r, \theta)]^2}{\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} f_p^2(r, \theta)}. \quad (13)$$

La Fig. 4 muestra el  $NIRE$  con respecto al parámetro  $\alpha$  de los momentos multicanal de Bessel-Fourier de orden fraccional para distintos valores de  $L$ . En la teoría de momentos ortogonales, el error de construcción que mayor converja a cero tiene una mejor capacidad de caracterizar con un número menor de momentos. Por tal motivo es importante conocer el error de reconstrucción con respecto al número máximo de momentos que se utiliza para reconstruir la imagen. La Fig. 5 muestra el error de reconstrucción de los momentos que utilizan como kernel base las funciones Bessel.

Lo interesante de la reconstrucción es que podemos visualizar como al aumentar el número de momentos podemos ver como aumentan los detalles de la imagen.

Sin embargo, no podemos cuantificar visualmente que conjunto tiene un mejor desempeño. En la Fig. 6 muestra la reconstrucción de la imagen Lena con su respectivo NIRE para verificar el desempeño del método propuesto.

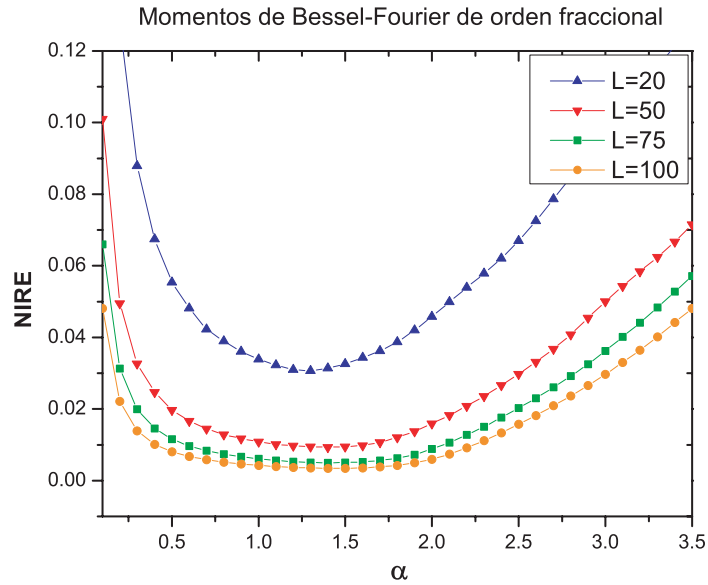


Fig. 4. NIRE de la imagen a color de “Lena” de tamaño 128 x 128 pixeles con un orden máximo de  $L = 20, 50, 75$  y 100 para diferentes valores de  $\alpha$ .

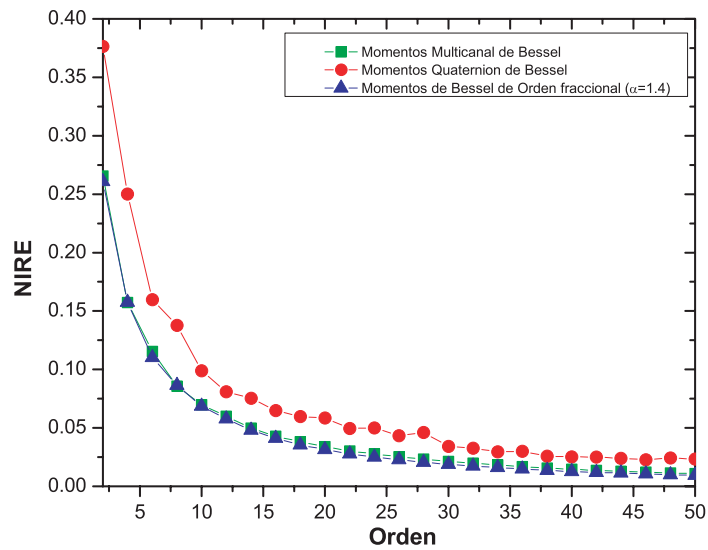
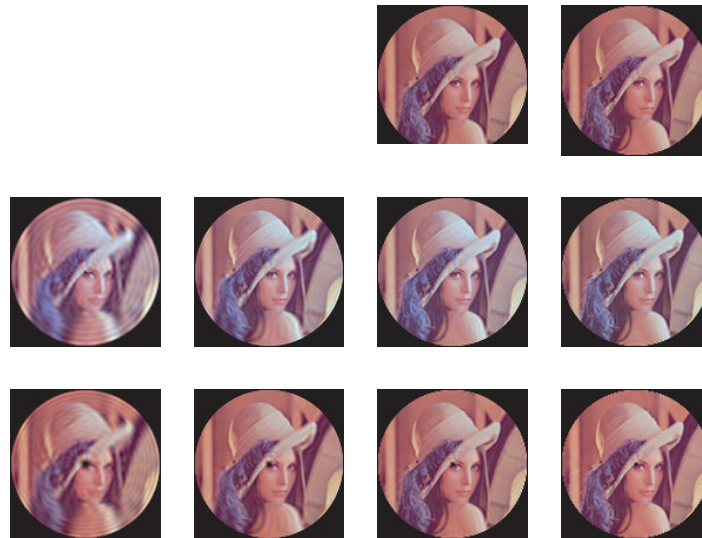


Fig. 5. NIRE de la imagen reconstruida de “Lena”.

## 5.2. Clasificación de imágenes a color

En tareas de clasificación supervisadas, el objetivo es construir un predictor que asigne una etiqueta de clase a las nuevas observaciones en donde las clases





**Fig. 6.** Reconstrucción de imágenes utilizando diferentes tipos de momentos con diferentes órdenes.

se describen mediante un vector de características. La combinación de múltiples clasificadores conocidos como kNN ensamble proporciona un mejor rendimiento en los algoritmos de aprendizaje, especialmente en presencia de características no informativas en las imágenes como es el caso de los momentos ortogonales. Por otra parte, la generalización de los momentos de Bessel-Fourier con el parámetro  $\alpha$  proporciona un espectro para la extracción de características de una imagen a color. En la Tabla 1 muestra los porcentajes de clasificación de la base de datos COIL-100 con KNN ensamble para diferentes valores de  $\alpha$  y con cantidades de descriptores distintos. Además, la Tabla 2 muestra una comparación de los porcentajes de clasificación con KNN ensamble de las diferentes familias de momentos de Bessel-Fourier que existen en la literatura y con el método propuesto. Por otra parte, en la Tabla 3 se muestra la comparación de los porcentajes del error de clasificación del método propuesto con los métodos de clasificación que hay en la literatura.

### 5.3. Análisis de resultados

La generalización de los momentos de Bessel-Furier nos brinda la capacidad de poderse adaptar a una aplicación determinada conociendo el valor de  $\alpha$  que mejor se adapte a ella. Sin embargo, la relación entre la capacidad de reconstrucción y la clasificación no es la misma. Se observa en la Fig.4, que la reconstrucción tienen un mejor desempeño en el intervalo de 1 a 1,5 esto se

**Tabla 1.** Clasificación de la base de datos COIL-100 con MMBFOF.

Orden	$\alpha$								
	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3	1.5	1.7	1.9	2.1
L=2	86.1	86.5	84.7	87.2	88.6	89.5	90.2	90.1	90.3
L=4	98.9	99.3	99.2	99.1	99.4	99.1	99.1	99.3	99.1
L=6	99.6	99.6	99.5	99.5	99.6	99.6	99.5	99.5	99.5
L=8	99.7	99.6	99.5	99.7	99.6	99.6	99.5	99.5	99.5
L=10	99.8	99.6	99.6	99.5	99.5	99.7	99.6	99.6	99.4
L=12	99.7	99.7	99.5	99.5	99.6	99.6	99.6	99.6	99.6
L=14	99.6	99.6	99.6	99.5	99.6	99.6	99.5	99.6	99.5
L=16	99.5	99.6	99.6	99.6	99.5	99.5	99.6	99.6	99.7
L=18	99.6	99.6	99.7	99.5	99.5	99.6	99.6	99.6	99.6
L=20	99.6	99.6	99.6	99.5	99.5	99.6	99.6	99.6	99.6

**Tabla 2.** Clasificación de la base de datos COIL-100 con diferentes familias de momentos Bessel-Fourier.

Familia de momentos	% de clasificación
Momentos de cuaternión Bessel-Fourier [15]	99.3%
Momentos multicanal de Bessel-Fourier [9]	99.6%
Método propuesto	99.8%

**Tabla 3.** Clasificación de la base de datos COIL-100 con diferentes métodos de clasificar.

Métodos	Error de clasificación
DCWN [5]	0.8 %
LinearBOF [10]	3.19 %
KernelSPM [10]	1.71 %
IRF-NN [19]	0.6 %
DWN [14]	0.8 %
Método propuesto	0.2 %

debe a que la capacidad descriptiva de una imagen depende de la distribución de los ceros de la familia de polinomios ortogonales, para el caso de los momentos de Bessel-Fourier de orden fraccional, el parámetro  $\alpha$  influye en la posición de los ceros de los polinomios de Bessel de orden fraccional como se observa en la Fig.2. También, en la Fig.4 se puede apreciar que existe un valor mínimo del error de reconstrucción (NIRE) para un determinado  $\alpha$  independientemente del número de momentos que se utilizan para reconstruir la imagen. Por otra parte, la comparación de los valores NIRE obtenidos con diferentes órdenes de los momentos Quaternion de Bessel-Fourier, los momentos Multicanal de Bessel-Fourier con los momentos de Bessel Fourier de orden fraccional se muestran en la Fig. 5. Asimismo, en la Fig. 6 se muestra las imágenes reconstruidas y el valor NIRE para cada conjunto de momentos para un orden de 20, 50, 75 y 100. En ambas figuras se puede ver claramente que: el valor de NIRE disminuye al aumentar el

orden de momento, y los valores de error para los momentos de Bessel-Fourier de orden fraccional son siempre los más pequeños; la inspección de las imágenes reconstruidas muestra que los momentos de Bessel-Fourier de orden fraccional con  $L = 100$  conducen a una mejor restitución visual del objeto.

El análisis cualitativo presentado es totalmente coherente con el índice cuantitativo NIRE donde el rendimiento de los momentos Multicanal de Bessel-Fourier es el más cercano a los momentos de Bessel-Fourier de orden fraccional. En el caso de la clasificación de la base de datos COIL-100 con el método propuesto, la Tabla 1 presenta el comportamiento de los porcentajes de clasificación dependiendo del número de descriptores y el parámetro  $\alpha$  en donde se puede observar existe un comportamiento que disminuye los números de descriptores y aumenta el porcentaje de clasificación para dos intervalos de  $\alpha$ ; el primero va de 0,5 a 0,9 en donde el mejor valor es de 99,8% con  $L = 10$  y el segundo, que va de 1,1 a 2,1 en donde el mejor valor es de 99,7% con  $L = 8$ . También, se muestra en la Tabla 2 como la propuesta presentada tiene un mejor desempeño que otras familias de momentos que utilizan las funciones de Bessel como kernel. Además, en la Tabla 3 muestra que la generalización de los momentos de Mellin a través de los momentos de orden fraccional obtiene el error mínimo de clasificación de todos los métodos de clasificación comparados.

## 6. Conclusiones

Se presento la generalización de los momentos multicanal de Bessel-Fourier de orden fraccional para el análisis de imágenes en color. El rendimiento de los momentos propuestos superó las familias de momentos Bessel-Fourier existentes en términos del error de reconstrucción y la clasificación de imágenes en color. La generalización propuesta tiene mejores capacidades para describir y extraer las características finas de las imágenes en color que las transformaciones con kernels de orden entero. Se tiene que realizar más experimentos tanto de reconstrucción como de clasificación para poder caracterizar el parámetro  $\alpha$  de los Momentos Multicanal de Bessel Fourier de Orden Fraccional propuestos con la finalidad de conocer como la distribución de ceros del kernel influye en mejora de aplicaciones de clasificación.

## Referencias

1. Benouini, R., Batioua, I., Zenkouar, K., Zahi, A., Najah, S., Qjidaa, H.: Fractional-order orthogonal chebyshev moments and moment invariants for image representation and pattern recognition. *Pattern Recognition* 86, 332–343 (2019)
2. Chen, B., Yu, M., Su, Q., Shim, H.J., Shi, Y.Q.: Fractional quaternion zernike moments for robust color image copy-move forgery detection. *IEEE Access* 6, 56637–56646 (2018)
3. Chong, C.W., Raveendran, P., Mukundan, R.: The scale invariants of pseudo-zernike moments. *Pattern Analysis & Applications* 6(3), 176–184 (2003)
4. Flusser, J., Suk, T., Zitová, B.: *2D and 3D Image Analysis by Moments*. John Wiley & Sons (2016)

5. Hassairi, S., Ejbali, R., Zaied, M.: Supervised image classification using deep convolutional wavelets network. In: 2015 IEEE 27th International Conference on Tools with Artificial Intelligence (ICTAI). pp. 265–271. IEEE (2015)
6. Hosny, K.M., Darwish, M.M., Aboelenen, T.: Novel fractional-order polar harmonic transforms for gray-scale and color image analysis. *Journal of the Franklin Institute* (2020)
7. Hu, H.t., Zhang, Y.d., Shao, C., Ju, Q.: Orthogonal moments based on exponent functions: Exponent-fourier moments. *Pattern Recognition* 47(8), 2596–2606 (2014)
8. Nene, S.A., Nayar, S.K., Murase, H., et al.: Columbia object image library (coil-20) (1996)
9. Pang, B., Liao, S.: Color image reconstructions from bessel-fourier moments. In: 2016 International Conference on Multimedia Systems and Signal Processing (ICMSSP). pp. 16–21. IEEE (2016)
10. Peng, X., Yan, R., Zhao, B., Tang, H., Yi, Z.: Fast low rank representation based spatial pyramid matching for image classification. *Knowledge-Based Systems* 90, 14–22 (2015)
11. Ping, Z., Ren, H., Zou, J., Sheng, Y., Bo, W.: Generic orthogonal moments: Jacobi-fourier moments for invariant image description. *Pattern recognition* 40(4), 1245–1254 (2007)
12. Ping, Z., Wu, R., Sheng, Y.: Image description with chebyshev-fourier moments. *JOSA A* 19(9), 1748–1754 (2002)
13. Ren, H., Ping, Z., Bo, W., Wu, W., Sheng, Y.: Multidistortion-invariant image recognition with radial harmonic fourier moments. *JOSA A* 20(4), 631–637 (2003)
14. Said, S., Jemai, O., Hassairi, S., Ejbali, R., Zaied, M., Amar, C.B.: Deep wavelet network for image classification. In: 2016 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics (SMC). pp. 000922–000927. IEEE (2016)
15. Shao, Z., Shu, H., Wu, J., Chen, B., Coatrieux, J.L.: Quaternion bessel-fourier moments and their invariant descriptors for object reconstruction and recognition. *Pattern Recognition* 47(2), 603–611 (2014)
16. Sheng, Y., Shen, L.: Orthogonal fourier-mellin moments for invariant pattern recognition. *JOSA A* 11(6), 1748–1757 (1994)
17. Singh, C., Singh, J.: Multi-channel versus quaternion orthogonal rotation invariant moments for color image representation. *Digital Signal Processing* 78, 376–392 (2018)
18. Singh, C., Walia, E., Upneja, R.: Accurate calculation of zernike moments. *Information Sciences* 233, 255–275 (2013)
19. Smagghe, P., Buessler, J.L., Urban, J.P.: Novelty detection in image recognition using irf neural networks properties. In: ESANN (2013)
20. Teague, M.R.: Image analysis via the general theory of moments\*. *J. Opt. Soc. Am.* 70(8), 920–930 (Aug 1980)
21. Xiao, B., Li, L., Li, Y., Li, W., Wang, G.: Image analysis by fractional-order orthogonal moments. *Information Sciences* 382, 135–149 (2017)
22. Xiao, B., Ma, J.F., Wang, X.: Image analysis by bessel-fourier moments. *Pattern Recognition* 43(8), 2620–2629 (2010)
23. Xiao, B., yin Wang, G., sheng Li, W.: Radial shifted legendre moments for image analysis and invariant image recognition. *Image and Vision Computing* 32(12), 994 – 1006 (2014)
24. Yang, J., Jin, D., Lu, Z.: Fractional order zernike moment [j]. *Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics* 29(3), 480–484 (2017)

25. Zhang, H., Li, Z., Liu, Y.: Fractional orthogonal fourier-mellin moments for pattern recognition. In: Chinese Conference on Pattern Recognition. pp. 766–778. Springer (2016)